Lineare Kosten- , Erlös- und Gewinnfunktion

Musteraufgabe:

Eine Firma stellt Schutzhüllen für Mobiltelefone her. Für ein bestimmtes Modell gilt folgendes:
Pro Monat können maximal 5000 Stk. hergestellt werden. Die reinen Herstellungskosten betragen € 3.50 /Stk. , die Fixkosten machen pro Monat € 2800.- aus.

(a) *Erstellen Sie die **Gesamtkostenfunktion K(x)** (kurz **Kostenfunktion**): Für den Zeitraum eines Monats ordnet sie bei der Produktion von x Stk die dafür notwendigen Gesamtkosten K(x) zu:*

Kostenfunktion: $\boldsymbol{K(x) = 3.5\,x + 2800}$

Also: Für die Herstellung eines Stückes benötigt man € 3.50, für x Stk eben 3.5 x Euro. Dazu kommen noch die monatlichen Fixkosten von € 2800.-

Begrifflich unterscheidet man noch:

k=3.5…………. proportionale Kosten/Stk (in €/Stk)

$K_v(x)$=3.5 x …..variable Kosten(funktion), im Gegensatz dazu die

F=2800 ………..Fixkosten

Allgemein: $K(x) = K_v(x) + F$, $\boldsymbol{K(x) = k \cdot x + F}$

Steigung k = **proportionale Kosten/ME**

Ordinatenabschnitt d= **Fixkosten F**

(b) *Erstellen Sie die **Erlösfunktion E(x)** , wenn der der Markt einen Verkaufspreis von 4.20 €/Stk bietet: Sie ordnet bei einem Verkauf von x Stk den entsprechenden Erlös E(x) zu. (Erlös = Umsatz= Einnahmen bei x Stk.)*

Erlösfunktion: $\boldsymbol{E(x) = 4.2 \cdot x}$

Die Steigung wird zum Unterschied von oben mit p bezeichnet (p=4.2), der Ordinatenabschnitt d=0. Die Gerade beginnt im Ursprung des Koordinatensystems.

Allgemein: $\boldsymbol{E(x) = p \cdot x}$, Steigung **p = Verkaufspreis/ME**

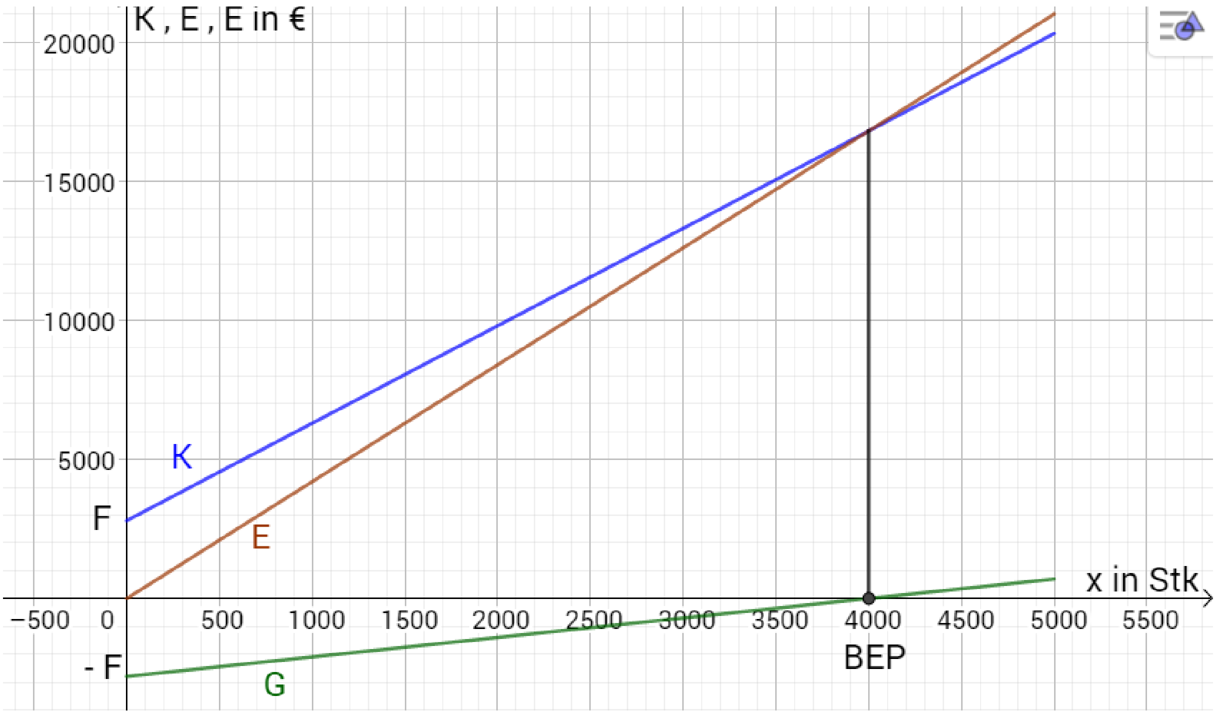
(c) *Erstellen Sie die **Gewinnfunktion G(x).** Sie ordnet bei einer Produktion und Verkauf von x Stk den (übrigbleibenden) Gewinn G(x) zu, der dadurch entsteht, dass man für x Stk von den Einnahmen (Erlös E(x)) die Ausgaben (Gesamtkosten K(x)) abzieht.*

Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x) = 4.2 \cdot x - (3.5 \cdot x + 2800)$

$G(x) = 0.7 \cdot x - 2800$

Allgemein: $\boldsymbol{G(x) = E(x) - K(x)}$	$G(x) = (p - k) \cdot x - F$ Steigung = „Aufschlag“ pro ME Ordinatenabschnitt = - F

(d) Erstellen Sie die Grafen von K , E und G – Funktion in einem Koordinatensystem. Berechnen Sie den ***Break even point (BEP)*** *und stellen sie einen Bezug zur Gewinnfunktion her.*



Der **Break even point (BEP)** ist jene **Stückzahl x**, wo **Kosten gleich Erlös** und sind, also Einnahmen und Ausgaben gleich sind, d. h. der Gewinn Null ist. (statt BEP wird auch Gewinnschwelle verwendet)

BEP = x- Koordinate des Schnittpunktes von K(x) und E(x) , oder

BEP = Nullstelle von G(x)

Berechnung: $E(x) = K(x) \Leftrightarrow x = BEP \quad oder \quad G(x) = 0 \Leftrightarrow x = BEP$

4.2 x = 3.5 x + 2800	0.7 x-2800 = 0
x = BEP = 4000 Stk.	x = BEP = 4000 Stk

d.h. Bei 4000 Stk. beträgt der Gewinn Null, bei größerer Stückzahl ist der Gewinn positiv, bei kleinerer Stückzahl negativ (negativer Gewinn oder Verlust) *(e) Bei wie viel Stk macht man einen (monatl.) Verlust von € 2000.-? Wie groß ist der(monatl.) maximale Gewinn?*

$G(x) = -2000 \quad , \quad x = ?$
$0.7\,x - 2800 = -2000 \quad \Rightarrow \; \boldsymbol{Bei\;\; x = 1142.9\, Stk} \;\; ein\, Verlust\; von\; 2000.-$

$xmax = 5000\, Stk \qquad G(5000) = 0.7 \cdot 5000 - 2800 = 700$

$\textbf{Maximaler Gewinn}: \mathbf{700.-}$

Durchschnittskosten (bzw. Stückkosten-) Funktion

In Weiterführung des Musterbeispiels könnte man jetzt fragen, wie groß etwa die Durchschnittskosten bei einer Produktion von 3000 Stk ausmachen. Dazu wird man zunächst die Gesamtkosten für 3000 Stk ausrechnen und diesen Betrag durch 3000 dividieren.

Durchschnittskosten $\overline{K}(3000) = \frac{K(3000)}{3000} = \frac{3.5 \cdot 3000 + 2800}{3000} = \frac{13300}{3000} = 4.43€/Stk$

Die Gesamtkosten werden also auf alle 3000 Stk aufgeteilt. Hier sieht man, dass noch kein Gewinn zu machen ist: Den Durchschnittskosten von $4.43€/Stk$ steht ein Verkaufspreis von $4.20€/Stk$ gegenüber. Es müssen mehr Stk produziert und verkauft werden, damit die Gesamtkosten auch auf mehr Stück aufgeteilt werden können! Welcher Zusammenhang besteht hier?

$$\frac{K(3000)}{3000} = \frac{3.5 \cdot 3000 + 2800}{3000} = 3.5 + \frac{2800}{3000} = 4.43€/Stk$$

Bei den Durchschnittskosten kommen also zu den „reinen“ Herstellungskosten/Stk (proportionale Kosten/Stk) noch der Anteil der Fixkosten $\frac{2800}{3000} = 0.93€/Stk$ dazu. Je mehr Stück produziert werden, umso kleiner ist der Fixkostenantel/Stk der zu 3.5 addiert wird! Beim BEP müssten Verkaufspreis/Stk und Durchschnittskosten gleich sein:

$$\overline{K}(4000) = \frac{K(4000)}{4000} = 3.5 + \frac{2800}{4000} = 3.5 + 0.7 = \frac{4.2€}{Stk} = p$$

Allgemein: **Durchschnittskostenfunktion (bzw. Stückkostenfunktion)** $\boldsymbol{\overline{K}(x)}$

$$\boxed{\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{k \cdot x + F}{x} = k + \frac{F}{x}}$$

$\overline{K}(x)$ stellt <u>keine</u> Lineare Funktion dar, sondern eine fallende Kurve (Hyperbel), die asymptotisch gegen k strebt ($\overline{K}(x) > k$)